Lucchini 1 : « Brauer-Manin en Superficies »

~~[illegible]~~

→ k = cuerpo de números

$\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$

X k-variedad := k-esquema separado de tipo finito (a menudo propio y suave)

Si X propia $\rightsquigarrow$ $X(\mathbb{A}_k) := \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ $\Omega_k = \{$lugares de $k\}$ (valores absolutos)

k_v = completación de k en $v \in \Omega_k$. $[k = \mathbb{Q}, \ \Omega_k = \text{primos y } \mathbb{R}]$.

→ Un contraejemplo al principio de Hasse: $C \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ intersección de dos cuádricas

$$\left.\begin{array}{c} 2y^2 - x^2 + 17z^2 = 0 \\ xz - w^2 = 0 \end{array}\right|$$

o se forma equiv. $C = V(2y^2 - x^4 + 17z^4) \subseteq \mathbb{P}(1,2,1)$.

$\rightsquigarrow$ C es suave de genero 1.

<u>Prop</u>: $C(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset$ y $C(\mathbb{Q}) = \emptyset$ (principio de Hasse $C(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset \Rightarrow C(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$)

<u>Dem</u>: Vemos C en $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(1,2,1)$, $C(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ok, C tiene buena reducción, fuera de 2 y 17. $g_C = 1$ + conj. de Weil $\Rightarrow C(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$ $\forall p \neq 2, 17$. Lema de Hensel $\Rightarrow C(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$.

Por otro lado $2 \equiv 6^2 (17)$, $3^4 \equiv 17 (64)$ + Hensel $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \in \mathbb{Q}_{17} \\ \sqrt[4]{17} \in \mathbb{Q}_2 \end{array} \right.$.

$(\sqrt{2} : \sqrt{2} : 0) \in C(\mathbb{Q}_{17})$, $(\sqrt[4]{17} : 0 : 1) \in C(\mathbb{Q}_2)$.

Supongamos que $C(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ y sea $(x_0 : y_0 : z_0) \in C(\mathbb{Q})$. Suponer $(x_0 : y_0 : z_0)$ y coprimos de 2 a 2.

p impar tq $p \mid y_0$ $\overset{\text{mod } p}{\Longrightarrow}$ $17 \in \mathbb{F}_p^{*2}$ i.e. $\left(\frac{17}{p}\right) = 1$.
$p \neq 17$

Aplicar recipr. cuadr. $\Rightarrow \left(\frac{p}{17}\right) = 1$. Además $\left(\frac{-1}{17}\right) = \left(\frac{2}{17}\right) = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{y_0}{17}\right) = 1$ $\therefore$ Mod 17, $2y_0^2 - x_0^4 \equiv 0 (17)$ $y_0 \equiv w_0^2 (17)$

$2 \equiv \left(\frac{x_0}{w_0}\right)^4 (17)$ $\rightarrow\leftarrow$

Dem 2: Vemos C en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ como antes, probemos $C(\mathbb{Q}) = \emptyset$. (2)

Recuerdo: $\langle a,b\rangle_p = \begin{cases} -1 & \text{si } b \notin N_{\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})/\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})^*) \\ 1 & \text{si } b \in \quad \text{"} \end{cases}$

↳ símbolo de Hilbert

Sea $P = [x_0 : y_0 : z_0 : w_0] \in C(\mathbb{Q}_p)$ para p dado. Si $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ tenemos $\langle 17, \frac{x_0}{y_0}\rangle_p = \langle 17, \frac{z_0}{y_0}\rangle_p$ ya que $x_0 z_0 = w_0^2$

- Suponer $p \neq 17$ y $17 \in \mathbb{Q}_p^{*2}$ (ie es un cuadrado $p=2$ y $\mathbb{R}$)
  Entonces $\langle 17, \frac{x_0}{y_0}\rangle_p = 1$
- Suponer $p \neq 17$ y $17 \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$ $\quad v_p\left(\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 - 17\left(\frac{z_0}{y_0}\right)^2\right) = v_p(2) = 0$.

$\Rightarrow \frac{x_0}{y_0}$ o $\frac{z_0}{y_0}$ es una unidad ~~p-ad~~ p-ádica, por la hipot. $17 \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$
Como $\mathbb{Q}_p(\sqrt{17})/\mathbb{Q}_p$ es una extensión no ramificada $\Rightarrow$ toda unidad es una norma $\Rightarrow \langle 17, \frac{x_0}{y_0}\rangle_p = 1$.

Suponer que $p = 17$, $\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 \equiv 2 \ (17) \Rightarrow \left(\frac{x_0}{y_0}\right) \in \mathbb{F}_{17}^{*2} \Leftrightarrow \underbrace{2 \in \mathbb{F}_{17}^{*4}}_{\text{falso}}$

$\Rightarrow \frac{x_0}{y_0} \in \mathbb{F}_{17}^{*2} \Rightarrow \langle 17, \frac{x_0}{y_0}\rangle = -1$.

Contradice la fórmula del producto: $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{Q} \quad \prod_{p \in \Sigma_{\mathbb{Q}}} \langle a,b\rangle_p = 1}$

Ley reciprocidad cuadrática generalizada

Grupo de Brauer en un cuerpo.

K cuerpo (de car 0)

Def 1.- • K-álgebra de división es una K-álgebra (assoc, 1) de dim finita tq todo elemento no nulo es invertible.

• K-álgebra central simple = K-álgebra de dim finita, simple (sin ideales biláterales no triviales), de centro K. (K-ACS)

Ej.- • Álgebras de cuaterniones $a,b \in K^*$ $(a,b) := K\oplus Ki \oplus Kj \oplus Kij$
$a=i^2,\ b=j^2,\ ij=-ji$.

Ej.- • Álgebras cíclicas: L/K cíclica de grado n, $\Gamma_{L/K}=\langle\sigma\rangle$ $b\in K^*$
$(\sigma,b) := \bigoplus_{i=0}^{n-1} L y^i$, $y^n=b$, $\sigma(\alpha)y=y\alpha$, $\forall \alpha\in L$.

Prop.- Sea A una K-álgebra. Son equivalentes.
• A es una K-álgebra central simple
• $A\otimes_K \bar{K} \simeq M_n(\bar{K})$
• $\exists$ una K-álgebra de división D, de centro K, tq $A\simeq M_n(D)$.

En particular A,B K-ACS $\Rightarrow$ $A\otimes_K B$ es una K-ACS.

Def.- • Dos K-ACS A,B son Brauer-equiv si $\exists m,n\in\mathbb{N}$ tq $\overbrace{A\otimes M_n(K)}^{M_n(A)}\simeq B\otimes M_m(K)$
[Se puede demostrar que entonces las álg. de div. $D_A=D_B$].

Def.- $Br(K) := \{K\text{-ACS}\}/_{Br\text{-eq}}$, grupo con producto $\otimes$.
[A K-alg, $A\otimes_K A^{op}\simeq M_{\dim_K A}(K)$] $\to$ dar vuelta mult.

Ej.- • Si $K=\bar{K}$, $Br(K)=0$. • Si K finito, $Br\,K=0$ (ya que alg div finita es cuerpo). $Br(\mathbb{R})=\mathbb{Z}/2=\{[\mathbb{R}],[\mathbb{H}]\}$

• Si K ~~[illegible]~~ local no arquimediano, $\exists\ inv_K : Br(K)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(~~extensión finita~~ de $\mathbb{Q}_p$)
cuerpo residual finito

Lucchini 2

- L/K cíclica. Si $\mu_n \subset K$ raíces de la unidad, $L = K(\sqrt[n]{a})$
  $\rightsquigarrow$ $(\sigma, b) = (a,b)_n$, $\Gamma_{L/K} = \langle\sigma\rangle$.
- En general, notación abusiva $(L/K, b)$.

Def 1.- X esquema. $Br(X) := H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m)_{tors}$.

Si X integral, η punto genérico $\Rightarrow H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m) \to H^2_{ét}(K(X), \mathbb{G}_m)$

$$H^2_{ét}(K(X), \mathbb{G}_m) = H^2(\Gamma_{K(X)}, \overline{K(X)}^*) = Br(K)$$

es inyectivo si X regular, noetheriano.

Además si $(n, car(K(X))) = 1$ o $\dim X \leq 2$, entonces la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \to (Br\,X)[n] \to (Br\,K(X))[n] \xrightarrow{\oplus \partial_x} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

$X^{(1)}$ = ptos de codim 1, $k(x)$ = cuerpo residual en x

∂_x = aplicación residuo

$\alpha \in Br(K(X))[n]$ se dice no ramificado en $x \in X^{(1)}$ si $\alpha \in \ker(\partial_x)$.

Ej 1.- Sea $L/K(X)$ extensión cíclica de grado p primo no ramificada en $x \in X^{(1)}$ (como antes mencionado)

Entonces $[(L/K(X), b)] \in \ker(\partial_x)$ ssi x totalmente descompuesto en L o $v_x(b) \equiv 0(p)$.

$\longrightarrow$ X una K-variedad $\rightsquigarrow$ Filtración de $Br(X)$

(elementos constantes) $Br_0(X) := Im(Br\,K \to Br\,X)$ $\qquad X \to K$.

(elementos algebraicos) $Br_1(X) := \ker(Br\,X \to Br\,\overline{X})$ $\qquad \overline{X} := X \times_K \overline{K}$

$$Br_0(X) \subset Br_1(X) \subset Br(X) \quad \text{(resto son trascendentes)}$$

¿Cómo calcular $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br}_0 X$? 2

Si $\bar{K}[X]^* = \bar{K}^*$ (eg X propio) entonces la sucesión espectral de Hochschild - Serre nos da la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\bar{X})^{\Gamma_K} \to \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}_1 X \to H^1(\Gamma_K, \mathrm{Pic}\,\bar{X}) \to H^3(K, \mathbb{G}_m).$$

Si K es local o global, $H^3(K, \mathbb{G}_m) = 0 \Rightarrow \mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}_0 X \cong \underbrace{H^1(\Gamma_K, \mathrm{Pic}\,\bar{X})}_{\text{geom. calculable}}$

¿Cómo calcular $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}_1 X$? Existe una inclusión
$\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}_1 X \hookrightarrow (\mathrm{Br}\,\bar{X})^{\Gamma_K}$ (no tiene porque ser epiyectiva)

El coker es finito. ∃ una sucesión exacta (Grothendieck)

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2 - \rho} \to \mathrm{Br}(\bar{X}) \to \bigoplus_\ell H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{\mathrm{tors}} \to 0$$

$b_2 = 2^{do}$ # Betti, ρ = rango de $NS(\bar{X})$

$\Rightarrow$ no da la estructura de módulo Galoisiano de $\mathrm{Br}\,\bar{X}$!

otras herramientas:

(1) Grupo de Châtelet-Weil de curvas elípticas con 2-torsión racional. Permite calcular elementos de $\mathrm{Br}\,X[2]$ para ciertas superficies K3.

(2) El teorema de pureza (sucesión exacta de residuos).

(3) Teoría de Hodge ⇝ eltos de $\mathrm{Br}\,X[2]$ en sup. K3 de grado 2.

P cubrim. de $\mathbb{P}^2$

(4) Si $X = \mathrm{Kum}(E \times E')$ E, E' curvas elípticas
$\mathrm{Br}\,X[\ell]$ se relaciona con homomorfismos $E \to E'$ y $E[\ell] \to E'[\ell]$ ⇝ $(\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}_1 X)[\text{impar}]$ de :

- Sup. cuárticas diagonales.
- Kum$(E\times E)$, ciertos E con mult. compleja.

→ obstrucción de Brauer-Manin.

k = cuerpo de números X = k-variedad suave, propia, geom. int

$\Omega_k = \{$lugares de $k\}$, $v\in\Omega_k \rightsquigarrow k_v, \mathcal{O}_v$

$S \subset \Omega_k$ finito, $\mathcal{O}_{k,S}$ = anillo de S-enteros.

$\forall X$, $\exists S\subset\Omega_k$ finito y un esquema $\mathcal{X}$ propio, suave sobre $\mathcal{O}_{k,S}$, tq $\mathcal{X}_k \simeq X$.

$$\mathcal{X} \text{ propio} \Rightarrow \mathcal{X}(\overset{\mathbb{Z}_p}{\mathcal{O}_v}) = X(\overset{\mathbb{Q}_p}{k_v}) \quad (\text{Crit. val. de propiedad})$$

$$X \text{ propio} \Rightarrow X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$$

$\forall$ cuerpo $K|k$, $\forall$ punto $P\in X(K)$ y $\forall\alpha\in Br(X)$ podemos tirar α vía P, y obtener $K\to X \downarrow k$ un elemento en $Br(K)$ llamado la evaluación de α en P y se denota $\alpha(P)$.

Lema: Si $P_v\in X(k_v)$ con $v\notin S \Rightarrow \alpha(P_v)=0\in Br(k_v)$

Dem:
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} k_v & \to & X_{k_v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathcal{O}_v & \to & \mathcal{X} \\ & & \downarrow \\ & & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{k,S} \end{array} \quad \alpha\in Br\,\mathcal{X}$$

$Br\,\mathcal{O}_v = Br\,\underbrace{\mathbb{F}_v}_{\text{cuerpo finito}} = 0$ y luego conmuta $\Rightarrow 0$.

Cor: $\forall\alpha\in Br X$, la imagen de $X(\mathbb{A}_k)\to\prod_{v\in\Omega} Br\,k_v$, $P_v\mapsto(\alpha(P_v))$ cae en $\bigoplus_{v\in\Omega} Br(k_v)$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & X(k) & \hookrightarrow & X(\mathbb{A}_k) & & \\ & & \downarrow \alpha(-) & & \downarrow \alpha(-) & & \\ 0 \to & & Br\,k & \longrightarrow & \bigoplus_{v\in\Omega_k} Br\,k_v & \xrightarrow{\sum inv_v} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \end{array}$$

$X(\mathbb{A}_k)^{Br} = \{(P_v) \,/\, \sum inv_v(\alpha(P_v))=0 \ \forall\alpha\in Br X\}$

$\therefore X(k)\subset X(\mathbb{A}_k)^{Br}\subset X(\mathbb{A}_k)$

$X(\mathbb{A}_k)^{Br}$ = obstr. de Brauer-Manin.

→ obstrucción de Brauer-Manin étale

k = cuerpo de #s, X como antes.

G k-grupo finito étale

Sea $Y \xrightarrow{f} X$ un G-torsor étale, ie, G actúa sobre Y (k-acción)

y étale-localmente $Y \to X$ es isomorfo a $X \times G \to X$.

Sea $x \in X(k)$, entonces $Y_x = f^{-1}(x)$ es un G torsor sobre k: Estos clasificados por $H^1(k, G)$. Luego:

$$X(k) = \coprod_{\tau \in H^1(k,G)} \{x \in X(k) / [Y_x] = \tau\}$$

Sea P un representante de $\tau \in H^1(k, G)$.

Fabricamos el producto contraído $Y \times^G P = (Y \times P)/G$ acción diagonal, y obtenemos un nuevo torsor $Y^P \xrightarrow{F} X$ bajo el grupo "torcido" G^P con la propiedad

$$F^P(Y^P(k)) = \{x \in X(k) / [Y_x] = \tau = [P]\}$$

Por lo tanto los pts racionales son $X(k) = \coprod_{[P] \in H^1(k,G)} F^P(Y^P(k))$

Aplicando Brauer-Manin a los Y^P, vemos que $X(k) \subset \bigcup_{[P] \in H^1(k,G)} F^P(Y^P(\mathbb{A}_k)^{Br})$

Y esto funciona para cualquier torsor $F: Y \to X$ bajo cualquier grupo G

tenemos que $\Rightarrow$ $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{ét\,Br} := \bigcap_{\substack{F: Y \to X \text{ torsor} \\ \text{bajo } G \text{ finito étale}}} \bigcup_{[P] \in H^1(k,G)} F^P(Y^P(\mathbb{A}_k)^{Br})$

Cubrimientos étale Galois escon.

$$X(\mathbb{A}_k^{ét,Br}) = \text{Conj Brauer-M étale de } X \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{Br}.$$

Resultados positivos y conjeturas (• Preg. invariantes bajo racionalidad) ②

Ej/ (Hasse-Minkowski) Toda cuádrica proy satisface el P.H.

Ej/ Sea A una variedad abeliana tq $Ш(A)$ es finito ($\ker(H^1(k,A) \to \prod H^1(k_v,A))$)
Entonces $X(k)$ es denso en $X(\mathbb{A}_k)^{Br\,X}$ para todo torsor de A.

Superficies de dim Kodaira $-\infty$: Hay 3 tipos salvo biracionalidad
(1) Fibrados en cónicas sobre una curva género ≥ 1.
(2) ——— $= 0$.
(3) Superficies de del Pezzo de grado $1 \leq d \leq 9$.

Para (1), BM ét No basta
Conj: BM basta para (2) y (3). (En general para sup. geom racionales)
en ese caso $Br\,X = Br_1 X$.

- del Pezzo de grado ≥ 5 satisfacen P.H. Es más $d=5,7 \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$.
- Para $d = 2,3,4$ existen contra-ejemplos a P.H., pero no hay gran resultado en torno a BM.
- Si $d=1$ siempre hay ptos racionales (pero falla la aprox débil)
- Fibrados en cónicas, si hay ≤ 5 fibras degeneradas o si toda fibra degenerada está sobre un $\mathbb{Q}$-punto $\Rightarrow$ la conj. vale

Superficies de dim de Kodaira 0:
Si suponemos X minimal hay 4 tipos
(1) X = sup de Enriques (Br basta $\Leftarrow$ Br basta K3) (3) X = bielíptica
(2) X = sup K3 (Br basta) (4) X = sup. abeliana - torsor bajo.

Conj (Skorobogatov) BM basta para K3 (ahí sabemos BM es neces. para K3
" ét " " Enriques)

Teo (3) y (4): Supongamos Ш de las superf abelianas son finitos. Entonces
1→ las (4) pueden no satisfacer P.H.
2— BM basta para explicar esto
3— BM No basta para explicar fallo de PH en superficies bielípticas.
4— BM^{ét} si basta.